Groupe : Mounaye Mint Amar / Bouhoubeiny.
Teyah Mint beddy / Tolba.
Lalla Radia Mint Abdel Kader.
Nessibe Mint Abdallahi.

7C1 :
Ecole El Maarif.

Exercice 2 : Fonctions :

$f(x) = \frac{(1+x)^{2015} - 1}{x}$

$0 \notin Df$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \frac{(1+x)^{2015} - 1}{x}$

$= \frac{(0+1)^{2015} - 1}{0} = \frac{(0+1)^{2015} - 1}{0}$

$= \frac{0}{0}$

lever l'indetermination

Soit $U(x) = (1+x)^{2015} \Rightarrow$

$\begin{cases} U(0) = 1 \\ U'(x) = 2015 \\ (1+x)^{2014} \\ U'(0) = 2015 \end{cases}$

$\lim_{0} \frac{(1+x)^{2015} - 1}{0} = \lim_{0} \frac{U(x) - U(0)}{x - 0}$

$U'(0) = 2015 \in \mathbb{R}.$

Donc f un prolongement Par Continuite en 0.

Ce prolongement est :

$\begin{cases} g(x = f(x)) = \forall x \in \mathbb{R}. \\ g(x_0) = 2015 \end{cases}$

Exercice 5 :

$f(x) = \cos x \quad \in [0, \pi]$

f est definie Continue et derivable sur $[0, \pi]$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) : f(0) = \cos 0 = 1$

$\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \cos \pi = -1$

$f'(x) = -\sin x.$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0, x = 0 \ (\in [0, \pi])$

$k = 1, x = \pi \ (\in [0, \pi])$

$k = 2, x = 2\pi \ (\in [2\pi])$

$k = -1, x = -\pi \ [< 0]$

T.V :

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1		-1

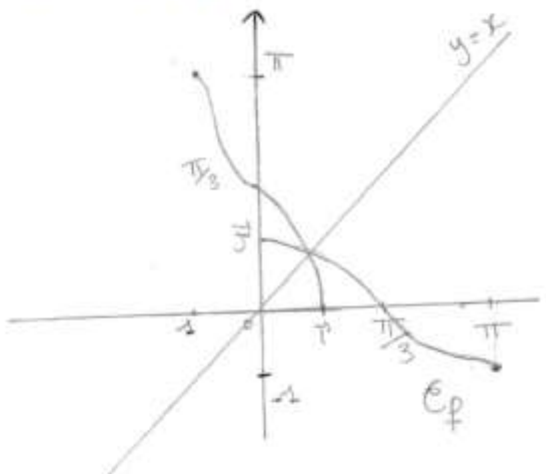
Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0,\pi]$, elle réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur l'intervalle $J=f([0,\pi])$

$J=f([0,\pi])=[-1,1]$

2). $C_f \cap (y'y) : (0,1)$

• $C_f \cap (x'x) : f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{et} \\ x\in[0,\pi] \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

Donc $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.



3°) Comme f est dérivable et comme sa dérivé ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert $]0,\pi[$ la fonction et donc dérivable sur $f(]0,\pi[) =]-1,1[$

et $\forall x \in]-1,1[$

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

or $$f'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

or $f'(y) = -\sin y$

$-\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-(f(y))^2}$

D'où :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-[f(f^{-1}(x))^2]}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Donc.

$$\forall x \in]-1,1[\ (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4)- On pose $\forall x \in [-1;1]$

$h(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$

Alors h est dérivable sur $]-1,1[$

et $\forall x \in]-1,1[\ h'(x) = (f^{-1})'(x) - (f^{-1})'(-x)$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}}\right)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Donc $\forall x \in]-1,1[\ h'(x)=0$

D'où h est constante sur $]-1,1[$

or $0 \in]-1;1[$ et

$h(0) = f^{-1}(0) + f^{-1}(0)$

$= 2\, f^{-1}(0)$

Groupe : Hounaye Mint Amar
Teyah Mint beddy
Lalla Radia Mint Abdel Kader.

$7C_1$: El Maarif

Exercice 8 : Les fonctions.

1) $f(x) = 2\cos x$

$D_f = \mathbb{R},]-\infty, +\infty[$

f est Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$. $f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi)$
$= 2\cos x = f(x)$.

Donc f est periodique : 2π.
Il suffit donc de l'etudier sur $]-\pi, \pi]$ or $\forall x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 2\cos(-x) = 2\cos x = f(x)$.
D'où f est paire.
Il suffit donc de l'etudier sur $[0, \pi]$

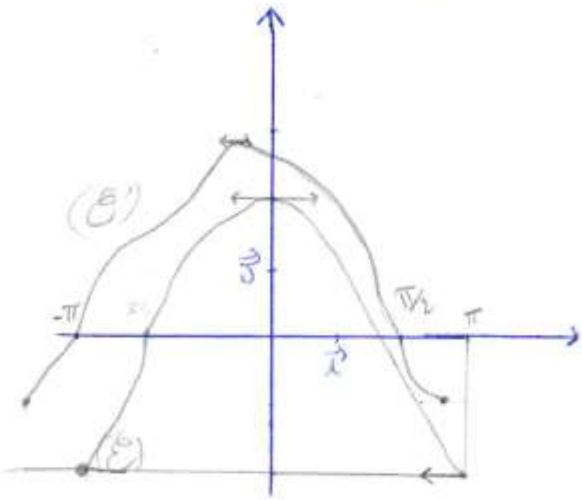
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2\cos(0) = 2 \times 1 = 2$
- $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = f(\pi) = 2\cos(\pi) = 2\times(-1) = -2$
- $f'(x) = -2\sin x \leq 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$

et $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ où $x = \pi$.

T.V de f :

x	0		π
f'	0	$-$	0
f	2	$\searrow$	-2

- $(\mathcal{E}) \cap (y'y) = (0, 2)$
- $(\mathcal{E}) \cap (x'x) = (\pi/2, 0)$



2°) $g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$
$= 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$
$= 1 + 2\cos(x + \pi/6)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$. $g(x) = 1 + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$. $g(x - \pi/6) = 1 + f(x)$

$$\begin{cases} x' = x - \pi/6 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Donc $(\mathcal{E}')$ est l'image de $(\mathcal{E})$ par la translation t de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -\pi/6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14 :

Groupe : Mounaye Mint Amar / bouhoubeiny.
Teyah Mint beddy / Tolba.
Lalla Radia Mint Abdel Kader.

7C1 :
El Maarif.

Exercice 2 : Integrale.

1°) $ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}=f(x), \forall x \in Df$

$\Rightarrow \frac{(ax+1)(ax+b)+c}{(x+1)^2}=f(x), \forall x \in Df$

$\Rightarrow \frac{(x^2+2x+1)(ax+b)}{(x+1)^2}=f(x)$

$\Rightarrow \frac{ax^3+bx+2ax+2bx+ax+b+c}{(x+1)^2}=f(x)$

$\frac{ax^3+(b+2a)x^2+(2b+a)x+b+c}{(x+1)^2}=$

$=\frac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

$\begin{cases} a=1 \\ b+2a=3 \\ 2b+a=3 \\ b+c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=3-2\times1=1 \\ 2\times1+1=3 \\ c=-3-1=-4 \end{array}$

$\forall x \in Df.$

$f(x)=x+1-\frac{4}{(x+1)^2}$

2°) $\forall x \in Df, f(x)=x+1-\frac{4}{(x+1)^2}$

Donc $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{4}{(x+1)^2}+c$

est une primitive de f sur

$]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

Exercice 4 :

1°) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

Soit $f'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

L'integrale $I=\int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

peut être sous la forme :

$I=\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})dx$

D'où : $I=\left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+1})^2\right]_0^1$

$$I=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}(1)^2$$

Enfin : $I=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}$

l'Integrale $J=\int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}\,dx$

peut-être sous la forme :

$$J=\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\times\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\,dx$$

d'où : $J=\left[\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$$J=\frac{-1}{1+\sqrt{2}}+1.$$

Enfin : $J=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Exercice 8 :

1) $I+J=\int_0^{\pi/2}(x\sin^2 x+x\cos^2 x)\,dx$

$$I+J=\int_0^{\pi/2}x(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx$$

$$I+J=\int_0^{\pi/2}x\,dx$$

$$I+J=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$$

$$I+J=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0^2\right]$$

$$\boxed{I+J=\frac{\pi^2}{8}}$$

2°) On a $I-J=\int_0^{\pi/2}(x\sin^2 x-x\cos^2 x)\,dx$

$$I-J=\int_0^{\pi/2}x(\sin^2 x-\cos^2 x)\,dx$$

$$I-J=\int_0^{\pi/2}(-x\cos 2x)\,dx$$

On utilise une integration Par parties :

On pose : $\begin{cases}u(x)=-x\\ v'(x)=\cos 2x\end{cases}$

Alors : $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x.\end{cases}$

Comme : $\int uv'=uv-\int u'v$

$$I-J=\left[-x\times\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$I-J=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin 2x)\,dx$$

$$I-J=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$I-J=-\frac{1}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}\cos 0$$

Suite exo 8 : Primitive et Intégrale.

$$\boxed{I - J = \frac{1}{2}}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} I + J = \dfrac{\pi^2}{8} \\ I - J = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Par addition :

$$2I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi^2 + 8}{16}}$$

Par soustraction :

$$2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{J = \frac{\pi^2 - 8}{16}}$$

Exercice 10 :

$* \; I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^2}$; $t = 4x+5$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 9 \\ x = 2 \Rightarrow t = 13 \end{cases}$$

$dt = 4dx \Rightarrow dx \; \frac{1}{4} dt$

$$I_1 = \int_9^{13} \frac{1}{4} \times \frac{1}{t^5} dt = \frac{1}{4} \int_9^{13} t^{-5} dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} t^{-4} \right]_9^{13} = \frac{-1}{4} \left(13^{-4} - 9^{-4} \right) .$$

$$\boxed{I_1 = \frac{-1}{16} \left(13^{-4} - 9^{-4} \right)}$$

$* \; I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; $x = \tan t$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \tan T = 1 \Rightarrow t = \pi/4 \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \pi/3 \end{cases}$$

$dx = (1 + \tan t) \, dt$

$dx = (1 + x^2) \, dt$

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1+x)}{1+x^2} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dt$$

$$I_2 = [t]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{2}}$$

* $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\,dx}{1+\cos x}$, $t = \tan\frac{x}{2}$

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = t\cos\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$

$dt = \frac{1}{2}\left[1+\tan^2\frac{x}{2}\right]dx$

$dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$

$dx = 2\cos^2\frac{x}{2}\,dt$

$I_3 = [4t]_0^1 \Rightarrow \boxed{I_3 = 4}$

* $I_4 : \int_2^3 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$, $t = x-1$

$I \begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

et $t = dx$

$t = x-1 \Rightarrow x = t+1$

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}\,dt$

$= \int_1^2 \left(\frac{t^3+3t^2+1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)dt$

$I_4 = \int_1^2 \left(t^{5/2} + 3t^{3/2} + 3t^{1/2} + t^{-1/2}\right)dt$

$I_4 = \left[\frac{1}{\frac{5}{2}+1}t^{\frac{5}{2}+1} + 3\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}\right]$

$I_4 = \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{6}{5}t^{5/2} + 2t^{3/2} + 2t^{1/2}\right]_1^2$

$I_4 = \left[\frac{2}{7}t^3\sqrt{t} + \frac{6}{5}t^2 + 2t\sqrt{t} + 2\sqrt{t}\right]_1^2$

$I_4 = \left[\sqrt{t}\left(\frac{2}{7}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 2t + 1\right)\right]_1^2$

$\boxed{I_4 = \sqrt{2}\left(\frac{16}{7} + \frac{24}{5} + 6\right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{6}{5}\right)}$

* $I_5 : \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}\,dx$

1ère étape : $t = \sqrt{x+1}$

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \frac{1}{2t}\,dx \Rightarrow dx = 2t\,dt.$

on sait que :

$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

$= t^2(t^2+1)$

Alors :

$I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t\;2t\,dt}{t^2(t^2+1)}$

$I_5 = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}$

Suite exo 10 :

2ème étape :

$t = \tan u$

$t = 1 \Rightarrow \tan u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

$t = \sqrt{3} \Rightarrow \tan u = \sqrt{3} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$

$dt = (1 + \tan^2 u)\, du$

$$I_5 = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1+\tan^2 u)}{\tan u + 1}\, du$$

$$I_5 = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} du$$

$$I_5 = [2u]_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$I_5 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \pi/6 .$$

Exercice 12 :

On pose $t = a + b - x$

$$\begin{cases} x = a \rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$$

$dt = -dx$

$$\Rightarrow \int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= -\int_b^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx .$$

2) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$

$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$

On pose $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$

$x \in [0, \pi/2]$

f est Continue sur $[0, \pi/2]$

quotients de deux fonctions Continues.

On prend $a = 0$; $b = \pi/2$

donc $a + b - x = \pi/2 - x$

$$f(a+b-x) = f(\pi/2 - x)$$

$$= \frac{\cos^3(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos^3(\pi/2 - x) + \sin^3(\frac{\pi}{2} - x)}$$

$$= \frac{\sin^3 x}{\sin^3(\frac{\pi}{2} - x) + \sin^3(\frac{\pi}{2} - x)}$$

D'après ①

$$\int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\pi/2} \cancel{\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$$

$$\boxed{J = I}$$

On a $I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$

$$I + J = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \pi/2$$

$$\boxed{I + J = \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} I = J \\ I + J = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I = J = \frac{\pi}{4}}$$

3 on pose $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}$

$a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$

f st Continue sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

on a : $f(a+b-x) = f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right)$

$= f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} - \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$= \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = -f(x)$

D'après 2 : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} f(x)\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dt$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} f(x)\,dx = -\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x)\,dx.$$

$k = -k$

$\Rightarrow \boxed{k = 0}$

Exercice 06 :

$F_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$; $n>0$

1) - La parité de F_n :

• Si n est paire :

$f_n(-x) = \dfrac{(-x)^n}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} = f_n(x)$

$\Rightarrow f_n$ est paire

• Si n est impaire :

$f_n(-x) = \dfrac{(-x)^n}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \dfrac{-x^n}{\sqrt{1+x^2}} = -f_n(x)$

$\Rightarrow f_n$ est impaire

b) - Les B.I : 1) $\boxed{n>2}$: $D_f =]-\infty ; +\infty[$

• $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2}} = \lim \dfrac{x^n}{|x|}$

$= \lim\limits_{+\infty} x^{n-1} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2}} = \lim \dfrac{x^n}{|x|} =$

$\lim \dfrac{x^n}{-x} = \lim\limits_{-\infty} (-x^{n-1})$

• n paire : $\Rightarrow (n-1)$: impaire

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

• n est impaire $\Rightarrow (n-1)$: Paire

$\Rightarrow \lim F_n(x) = -\infty$

Donc comme $\lim\limits_{\infty} F(x) = \infty$

on calcule : $\lim\limits_{\infty} \dfrac{F_n(x)}{x}$

$\lim\limits_{\mp\infty} \dfrac{F(x)}{x} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} =$

$\lim\left(\dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$= \lim \dfrac{x^{n-1}}{|x|} = \mp\infty$

Donc C_{f_n} admet une B.P de direction (oy) aux voisinages de l'∞ $(n>2)$ b) $\boxed{\text{Si } n=1}$

• $\lim\limits_{+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{x} = 1$

C_{f_1} admet A.H de $y=1$ au voisinage de $(+\infty)$

• $\lim\limits_{-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{x}{|x|}$

$= \dfrac{x}{-x} = -1$

C_{f_1} admet AH : $y=-1$ au voisinage $(-\infty)$

c) $\boxed{\text{Si } n=2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{x^2}{|x|} = \dfrac{x^2}{x} =$

$\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} (x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, on doit calculer

• $\lim \dfrac{f(x)}{x} =$

• $\lim\limits_{\mp\infty} \dfrac{F_2(x)}{x} = \lim\limits_{\mp\infty} \dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x} = \dfrac{x^2}{x\cdot|x|}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = \lim \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

de même $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x) = \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$

- on calcule $\lim\limits_{+\infty} (F(x) - x) =$

$$\lim_{+\infty} (F(x) - x) = \lim \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x\right)$$

$$= \lim_{+\infty} \left(\frac{x^2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$; on

multiplie par l'expression conjugué

$$= \lim \left(\frac{x^2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{x^2 + x\sqrt{x^2+1}}{x^2 + x\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2+1)}{(\sqrt{x^2+1})(x^2 + x\sqrt{x^2+1})} =$$

$$\lim_{+\infty} \frac{-x^2}{(\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})})(x^2 + x\sqrt{x^2+1})}$$

$$\lim_{+\infty} = \frac{-x^2}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})(x(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \lim_{+\infty} = \frac{-1}{(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$\lim_{+\infty} \frac{-1}{+\infty} = 0 \Rightarrow$ A.O aux voisinages de $+\infty$ d'équation $y = x$,

De même $\mathcal{C}_{f_2}$ admet A.O au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = -x$

2°) * $f_{n+1}(x) = f_n(x) \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$x^{n+1} - x^n = 0 \Rightarrow x^n(x-1) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$
• $x = 0$; $f_n(0) = 0 \Rightarrow O(0,0)$
• $x = 1$; $f_n(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$

donc toutes les courbes passent par O (l'origine) et A

3) * on étudier de signe de :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$$

• n = pair

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^n	+	0	+		+
$x-1$	−		−	0	+
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	−	0	−	0	+
P.R	$\mathcal{E}_n$ / $\mathcal{E}_{n+1}$		$\mathcal{E}_n$ / $\mathcal{E}_{n+1}$		$\mathcal{E}_{n+1}$ / $\mathcal{E}_n$

Exercice III:

$$I_{k,n} = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\, dx$$

1) - La fonction $x \to C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ est continue sur $[0,1]$.

pour tout k et $n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, $n \geq 2$

car un polynôme (en developpant)

Alors l'integrale $I_{k,n}$ existe pour tout n et k

2) En utilisant une I.P.P on pose

$$\begin{cases} u'(x) = C_n^k x^k \\ v(x) = (1-x)^{n-k} \end{cases} \quad \text{Alors :}$$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{C_n^k}{k+1} x^{k+1} \\ v'(x) = -(n-k)(1-x)^{n-k-1} \end{cases}$$

$$I_{k,n} = \left[\frac{C_n^k}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-k}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{n-k}{k+1} C_n^k x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}\, dx$$

$$I_{k,n} = 0 + \int_0^1 \frac{n-k}{k+1} C_n^k x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)}\, dx$$

On a : $C_n^{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$$

Alors en remplaçant :

$$I_{k,n} = \int_0^1 C_n^{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)}\, dx$$

$$\boxed{I_{k,n} = I_{k+1,n}}$$

on en deduit que suite $(I_{k,n})$ est constante par rapport à k.

c-a-d : $I_{k,n} = I_{0,n} = I_{n,n}$

(Independant de k)

$$I_{n,n} = \int_0^1 C_n^n x^n (1-x)^0\, dx$$

$$I_{n,n} = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

Pour tout $k \leq n$, Autre méthode.

, comme $I_{k,n}$ est constante Par Rapport à k, on a : alors

$$\sum_{k=0}^{n} I_{k,n} = (n+1) I_{k,n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} I_{k,n} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\, dx$$

$$= \int_0^1 (x+(1-x))^n dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1$$

$$\sum_{k=0}^{n} I_{k,n} = 1 \Rightarrow (n+1) I_{k,n} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{k,n} = \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 6 :

$U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,1]$ d'où l'intégrale U_n existe et l'écriture $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ définit bien une suite numérique

2)- $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ et $U_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}$

(qui est ≥ 0 sur $[0,1]$ on obtient :

$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$

D'ou $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

D'ou : U_n est ↘ et Positive et comme elle est ↘ et Minorée par (0) elles est convergente.

3)- $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}\,dt$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 0 < 1 \leq t^2+1 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

et en multipliant Par t^n (qui est ≥ 0 sur $[0,1]$ on obtient)

$\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

$\frac{1}{2}\int_0^1 t^n\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n\,dt}{t^2+1} \leq \int_0^1 t^n\,dt$